제 11 장 평균의 법칙

1. 평균의 법칙 (대수의 법칙)
2. 확 률 과 정
3. 상 자 모 형
4. 평균의 법칙이 적용되지 않는 반례

1. 평균의 법칙

평균의 법칙

각 타석은 독립입니다.

1. 평균의 법칙

평균의 법칙

(i) 이미 앞면이 많이 나왔다고 해서 이후의 시행에서 앞면이 나올 확률이 감소하는 것은 아니다.

(ii) 던지는 횟수가 증가한다고 해서 앞면이 나오는 횟수와 기대횟수의 차이가 줄어드는 것도 아니다.

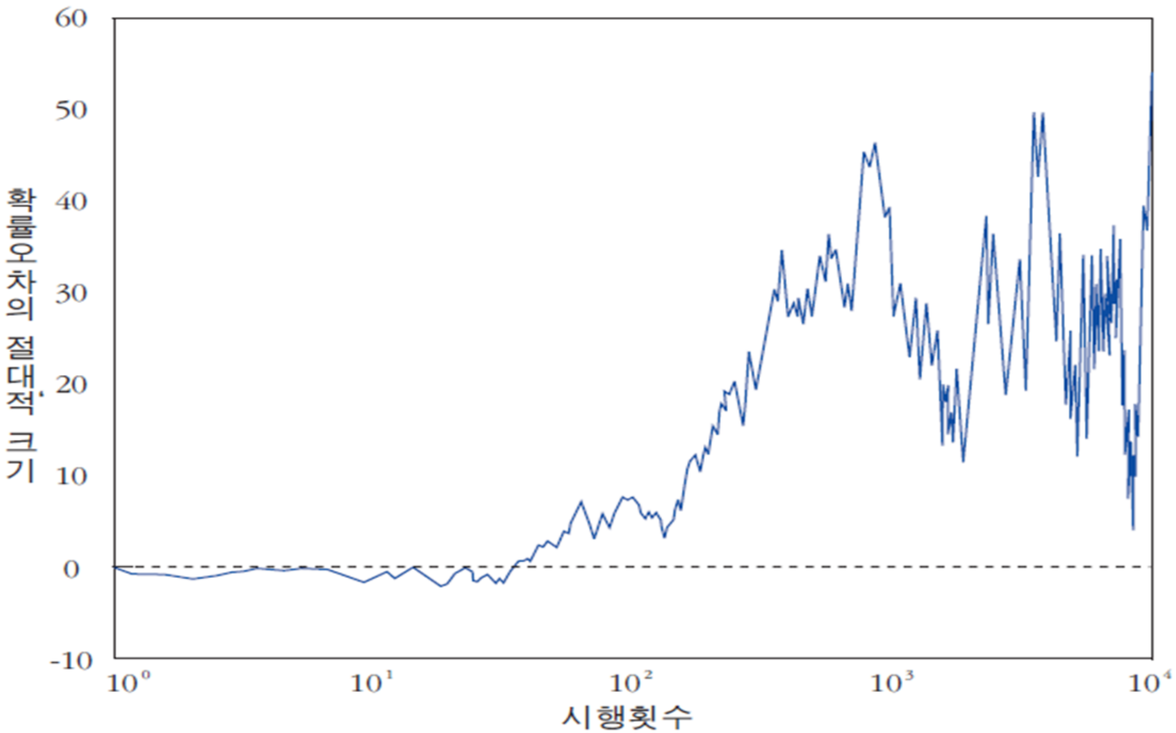
동전을 순차적으로 10,000번 던진 기록

던진횟수	앞면의 횟수	앞면의 횟수와 기대횟수의 차이	던진횟수	앞면의 횟수	앞면의 횟수와 기대횟수의 차이
10	4	−1	600	331	31
20	9	−1	700	379	29
30	14	−1	800	443	43
40	21	1	900	492	42
50	27	2	1,000	532	32
60	36	6	2,000	1,021	21
70	38	3	3,000	1,527	27
80	44	4	4,000	2,041	41
90	52	7	5,000	2,519	19
100	57	7	6,000	3,028	28
200	114	14	7,000	3,524	24
300	170	20	8,000	4,021	21
400	227	27	9,000	4,518	18
500	278	28	10,000	5,044	44

1. 평균의 법칙

평균의 법칙

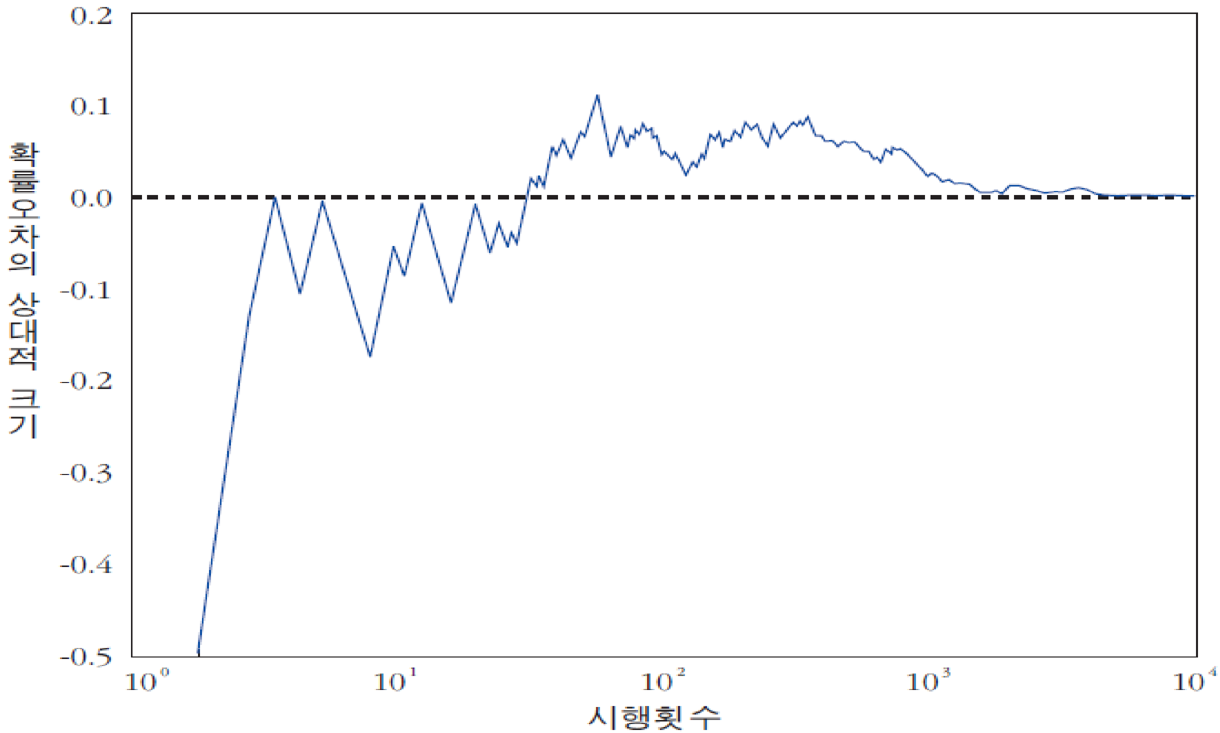
시행횟수가 증가할수록 확률오차의 절대적 크기는 증가한다.



1. 평균의 법칙

평균의 법칙

시행횟수가 증가할수록 시행횟수에 대비한 확률오차의 상대적 크기는 감소한다. 이게 바로 평균의 법칙이다.



2. 확률과정

확률과정

- 동전던지기에서 앞면이 나오는 횟수를 기록하는 일
- 카지노 룰렛 게임에서 몇 번 이길지 계산해보는 일
- 표본조사를 통해 구한 실업률의 정확도를 측정하는 일
- 선거결과를 예측하기 위한 여론조사 결과를 해석하는 일

→ 확률과정을 이용하여 분석가능

2. 확률과정

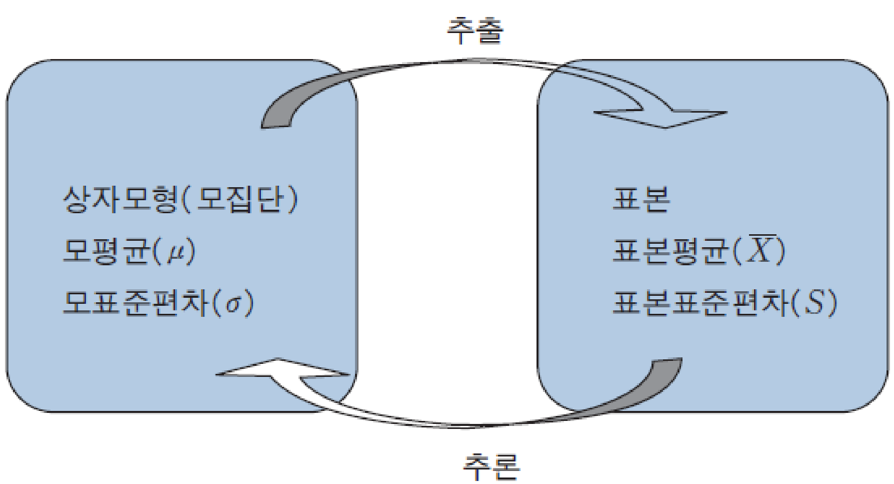
확률과정과 상자모형

상자모형

하나의 확률과정을 상자에서 숫자를 무작위로 추출하는 과정으로 묘사. 상자모형을 이용할 경우 복잡한 확률과정도 쉽게 이해됨

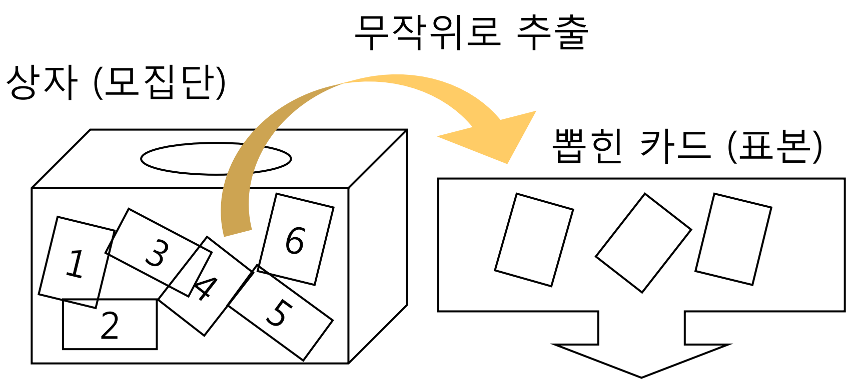
추론(inference)

표본정보를 이용하여 모집단에 대해 무언가를 알아내는 과정. 모집단=상자



3. 상자모형

상자모형



32462 35442 36412 41556 22255 **합=88**

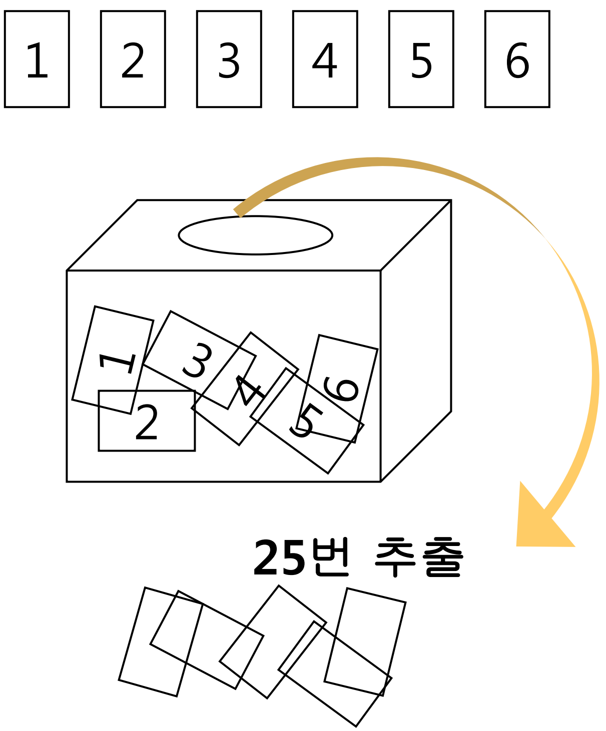
- 1부터 6까지 적힌 카드가 한장씩 들어있는 상자로부터 무작위로 한 장의 카드 추출
- 뽑힌 카드를 상자에 복원시킨 뒤 다시 무작위로 한 장을 추출
- 이를 25번 반복하여 뽑힌 카드에 적혀 있는 숫자를 합산
- 전체를 10회 반복한 결과 → 88 84 80 90 83 78 95 94 80 89

원칙적으로 합은 최저 25에서 최고 150까지 가능하나 실제로 관측된 값은 대부분 75와 100 사이에 위치한다.

3. 상자모형

상자모형

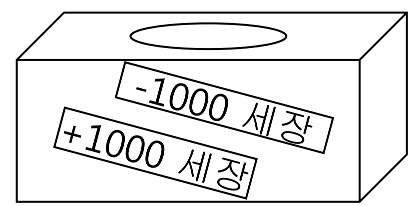
- 상자 안에는 어떤 숫자카드가 들어가야 하는가?
- 각 숫자카드가 몇 장씩 들어가야 하는가?
- 상자로부터 몇 회 추출해야 하는가?



3. 상자모형

상자모형

하나의 주사위를 던져 나온 눈이 홀수냐 짝수냐에 따라 천원을 따거나 잃는 게임을 상자모형으로 표현해 보자.

어떤 숫자카드?	게임당 천원을 따거나 잃음	+1000 -1000
각 카드는 몇 장씩?	홀수가 셋, 짝수가 셋	
몇 회 추출?	25회 게임 참가	25장 무작위 복원추출
순이득?	25회 추출한 숫자들의 합	+1000 + -1000……

4. 평균의 법칙이 적용되지 않는 반례

Doubling Strategy

- 따거나 잃을 확률이 같은 하나의 공정한 게임(fair game)을 생각해보자.
- 최초로 일정액의 금액을 건다. 그 일정액을 1 이라고 두자.
- 따면 게임을 중지하되, 잃으면 게임을 지속하며 두 배의 금액을 건다.
- 이런 방식으로 게임을 지속하다가 최초로 따는 순간 게임을 중지한다.
- $1+2+\ldots+2^9=(2^{10}-1)/(2-1)=1{,}023$이므로 애당초 판돈 1,023을 가지고 게임을 시작하면 계속 잃기만 하더라도 최대 10번까지 게임에 참가할 수 있다.
- T=게임에 참여한 횟수를 나타내는 확률변수
- $P(T=1)=1/2$ (바로 딸 확률), $P(T=2)=(1/2) \times (1/2)$ (처음엔 잃고 이어 딸 확률)

  $P(T=9)=(1/2)^8 \times (1/2)$ (8번 잃고 9번째 딸 확률)

  $P(T=10)=\ )=(1/2)^9$ (9번째까지 계속 잃을 확률. 10번째는 따든 잃든 무조건 게임 종료). 확인: $P(T=1)+\ldots P(T=10)=1$

4. 평균의 법칙이 적용되지 않는 반례

Doubling Strategy

- W=따고 게임을 마치는 사건
- L=잃고 게임을 마치는 사건
- P(L)=10번 모두 잃을 확률=$(1/2)^{10}$=1/1,024
- P(W)=1-P(L)=1-$(1/2)^{10}$=1,023/1,024
- X=딴 금액을 나타내는 확률변수
- X의 확률분포: W = 1 : 1,023/1,024 의 확률로 발생

  =-1023 : 1/1,024 의 확률로 발생
- EX=1 x (1,023/1,024)+ (-1,023) x (1/1,024)=0 이므로 doubling strategy를 구사하더라도 이 게임은 여전히 따는 금액의 기대값이 0 인 공정한 게임
- 일반적으로 공정한 게임의 기대치 0을 향상시킬 수 있는 전략은 존재하지 않음
- 게임참가횟수가 무한히 증가함에 따라 X는 점차 그 기대값 0과 다른 1로 확률 수렴한다.