

제 10 장 이항공식

1. 성공과 실패의 연속
2. 베르누이 확률변수와 이항분포
3. 이항공식

1. 성공과 실패의 연속

이항공식의 적용 예

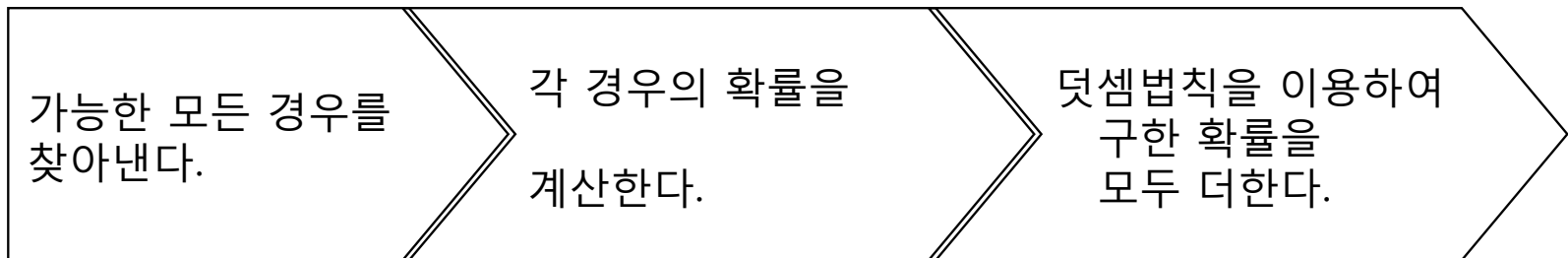
- 동전을 4 번 던질 때 앞면이 1 번 나올 확률
 - 주사위를 10 번 던질 때 1의 눈이 3 번 나올 확률
 - 내가 산 주식이 앞으로 5일간 매일 오를 확률
 - 한 장의 붉은 카드와 아홉 장의 푸른 카드가 든 상자에서 무작위로 5 번 복원 추출할 때 붉은 카드를 두 장 뽑을 확률
- 결과가 둘(성공과 실패)로 나뉘는 경우 이항공식의 적용을 생각해 본다.

1. 성공과 실패의 연속

이항공식의 적용 예

- 한 장의 붉은 카드와 아홉 장의 푸른 카드가 든 상자에서 무작위로 5 번 복원 추출할 때 붉은 카드를 두 장 뽑을 확률

→ 이러한 문제를 풀어가는 방식은 다음과 같다.



1. 성공과 실패의 연속

이항공식의 적용 예

- $5!/(2! \times 3!) = 10 \rightarrow$ 가능하나 모든 경우의 수는 10
- $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 \rightarrow$ 각 경우의 확률
- 총 10 가지 경우에 걸쳐 각 경우의 확률을 더함
- $\left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 10 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \left(\frac{9}{10}\right)^3 \approx 7\%$

2. 베르누이 확률변수와 이항분포

베르누이 확률분포

베르누이 시행 (Bernoulli trial):

합격/불합격, 성공/실패처럼 결과가 둘로 나뉘는 시행

베르누이 확률변수:

베르누이 시행에서 성공에 1을, 실패에 0을 대응시키는 확률변수

2. 베르누이 확률변수와 이항분포

이항분포(binomial distribution)

베르누이 시행

- 결과가 성공과 실패의 둘로만 나뉘는 시행

이항확률변수, 이항분포

- 성공확률이 p 로 일정한 베르누이 시행을 독립적으로 n 번 반복
- X_1, X_2, \dots, X_n 은 각각 첫 번째, 두 번째, ..., n 번째 시행의 결과
- X = 총 성공횟수 = 이항확률변수
- $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ 으로 표현됨
- $X \sim B(n, p)$: X 는 n 과 p 를 모수로 갖는 이항분포(binomial distribution)를 따름

3. 이항공식

이항공식

n 번의 시행 중 k 번 성공할 확률

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

- 여기서 n 은 시행횟수, k 는 성공횟수, p 는 성공확률을 나타냄

이항공식은 다음 조건 하에서 성립한다.

- n 의 값은 미리 정해져 있다.
- 매 번의 시행은 상호 독립이다.
- p 는 매 시행마다 동일하다.

3. 이항공식

이항확률변수의 평균과 분산

이항확률변수의 평균과 분산은 아래와 같다.

- $E(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1-p)$

3. 이항공식

이항공식을 적용할 수 없는 반례 1

반례 1) 6의 눈이 나올 때까지 주사위를 던진다고 하자. 6의 눈이 나오기까지 1의 눈이 먼저 두 번 나올 확률을 구할 때 이항공식을 이용할 수 있겠는가?

→ n 이 미리 정해져 있지 않아, 이항공식을 쓸 수 없다.

3. 이항공식

이항공식을 적용할 수 없는 반례 2

반례 2) 1 1 2 3 4 5 의 카드가 들어 있는 상자로부터 열 번의 복원추출을 한다. 단, 마지막 추출 전에 5번 카드를 상자로부터 제거한다. 다음 문장의 참, 거짓을 판별하라.

“1이 두 번 뽑힐 확률은 $\frac{10!}{2! 8!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^8$ 이다.”

→거짓이다. 1이 나올 확률이 변하므로 이항공식을 적용할 수 없다.

3. 이항공식

이항공식을 적용할 수 없는 반례 3

반례 3) 1 1 2 3 4 5 의 카드가 들어 있는 상자로부터 세 번의 비복원추출을 한다. 다음 문장의 참, 거짓을 판별하라.

“1이 두 번 뽑힐 확률은 $\frac{3!}{2! 1!} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right)^1$ 이다.”

→거짓이다. 비복원추출의 결과 매번의 추출이 서로 독립이 아니므로 이항공식을 적용할 수 없다.