# 제 4 장 정규분포로의 근사

1. 단위변환
2. 정규분포곡선
3. 표준정규분포곡선 아래의 영역 찾기
4. 자료에 대한 정규 근사
5. 백분위수
6. 사분위수와 상자그림
7. 백분위수와 정규분포곡선

# 1. 단위 변환

**단위 변환**

상수를 더하거나 곱하는 변환

예: 섭씨 온도(y)=5/9(화씨 온도(x)-32). 즉 y=-160/9+(5/9)x

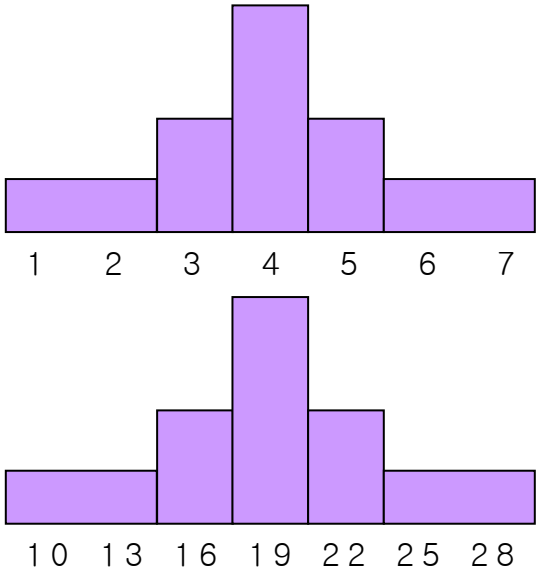
표준화(standardization): 평균을 빼주고 표준편차로 나누어 주는 변환

확률변수 $X \sim N(\mu \ , \sigma^2)$일 때

$$Z = (X - \mu)/\sigma \sim \mathrm{N}(0, \ 1)$$

# 1. 단위 변환

단위 변환




분포의 전반적 형태는 y=7+3x 의 단위변환 이후에도 불변임

# 2. 정규분포곡선

**정규분포곡선**

하나의 이상적인 히스토그램. 하나의 수학적 모형. 개념상 모집단의 분포

정규분포의 확률밀도함수(probability density function)

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty,\ \square\ \square\ \square\quad e=2.71828\cdots$$

μ를 모평균, σ를 모표준편차라고 부름

모집단: 모평균과 모표준편차

표본 : 표본평균과 표본표준편차

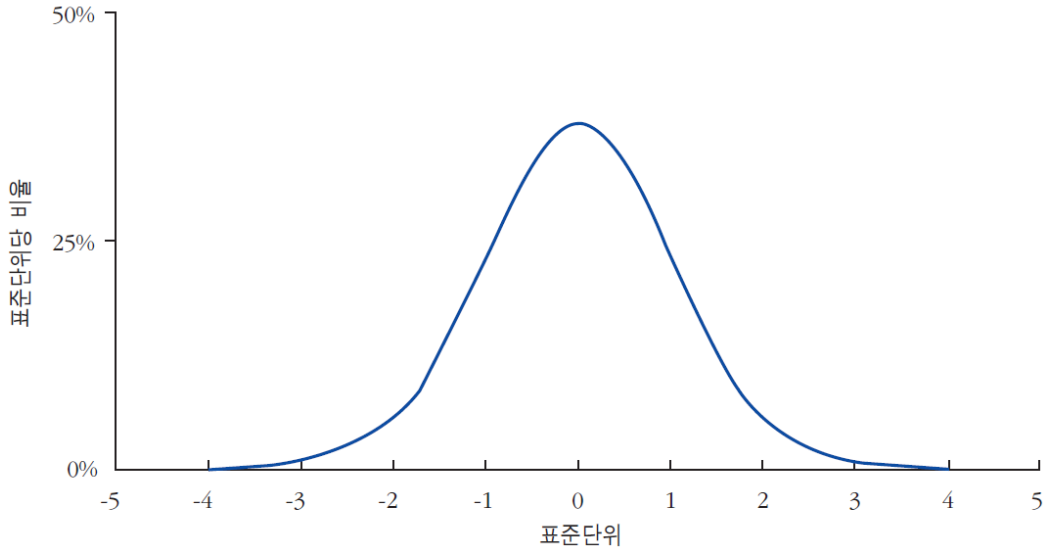
# 2. 정규분포곡선

표준정규분포 (standard normal distribution)

평균이 0이고 표준편차가 1인

정규분포: Z~N(0, 1)

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty<z<\infty$$




정규분포곡선의 68-95-99.7 규칙

- 표준단위로 -1부터 1까지 영역의 넓이 : 약 68%
- 표준단위로 -2부터 2까지 영역의 넓이 : 약 95%
- 표준단위로 -3부터 3까지 영역의 넓이 : 약 99.7%

# 2. 정규분포곡선

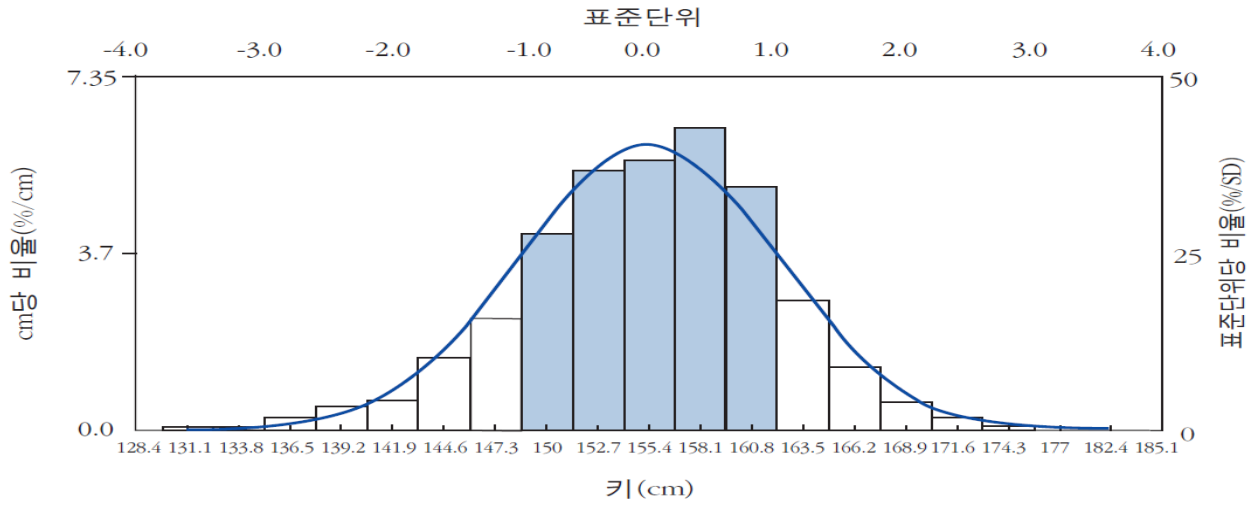
**정규분포곡선의 모양**

평균을 중심으로 좌우 대칭(symmetric)

종 모양(bell-shaped)

봉우리가 하나(single-peaked)

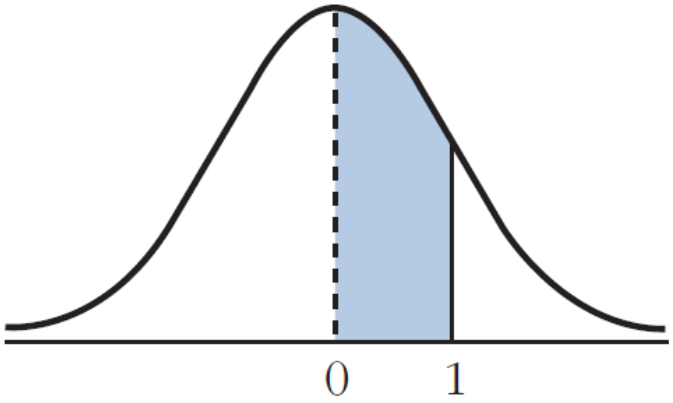
그림 4-2 여성의 키 분포를 나타내는 히스토그램과 표준정규분포곡선



# 3. 표준정규분포곡선 아래의 영역 찾기

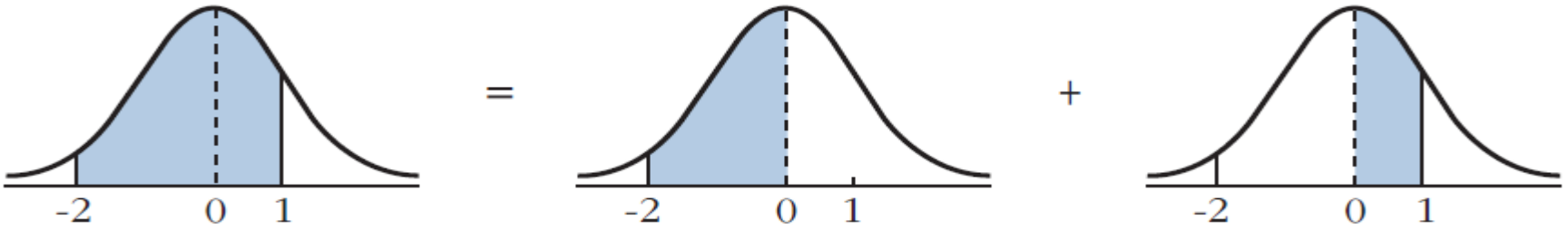
표준정규분포곡선 아래의 영역 찾기

0과 1 사이 구간의 면적은 전체의 34.13%




| z | .00 | .01 | .02 |
|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 |

-2와 1 사이 구간의 면적은 48% + 34% = 82% 이다.



# 4. 자료에 대한 정규 근사

**평균과 표준편차**

정규분포곡선은 평균과 표준편차에 의해 그 모양이 완벽하게 묘사된다.

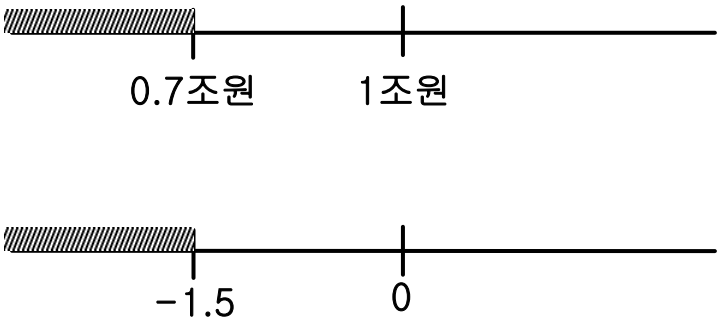
즉, 정규분포를 따르는 히스토그램은 중심과 중심 주위로 퍼진 정도 등 두 정보만으로 100% 묘사된다.

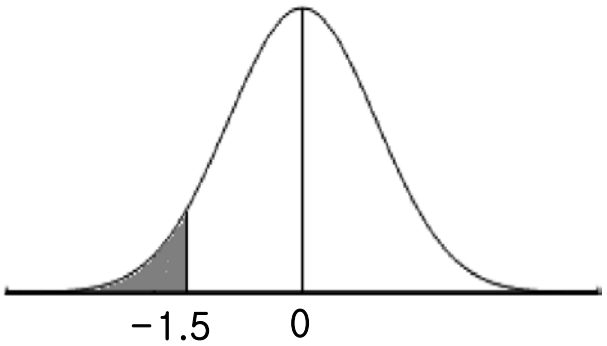
# 4. 자료에 대한 정규 근사

정규 근사

예: 한 은행이 특정 영업일에 지급준비금 부족을 겪을 가능성은? (답: 6.68%)

(매일 영업이 끝난 뒤 이 은행에 남아있는 잔고는 평균이 1조원이고 표준편차가 0.2조원인 정규분포에 의해 잘 근사된다고 가정. 지급준비금은 0.7조원 이상이어야 한다고 가정)




표준정규분포곡선에
해당 구간을 표시

# 5. 백분위수

**백분위수의 정의**

백분위수(percentile)는 하나의 히스토그램을 100개의 균등한 영역으로 나누는 99개의 경계점 값들

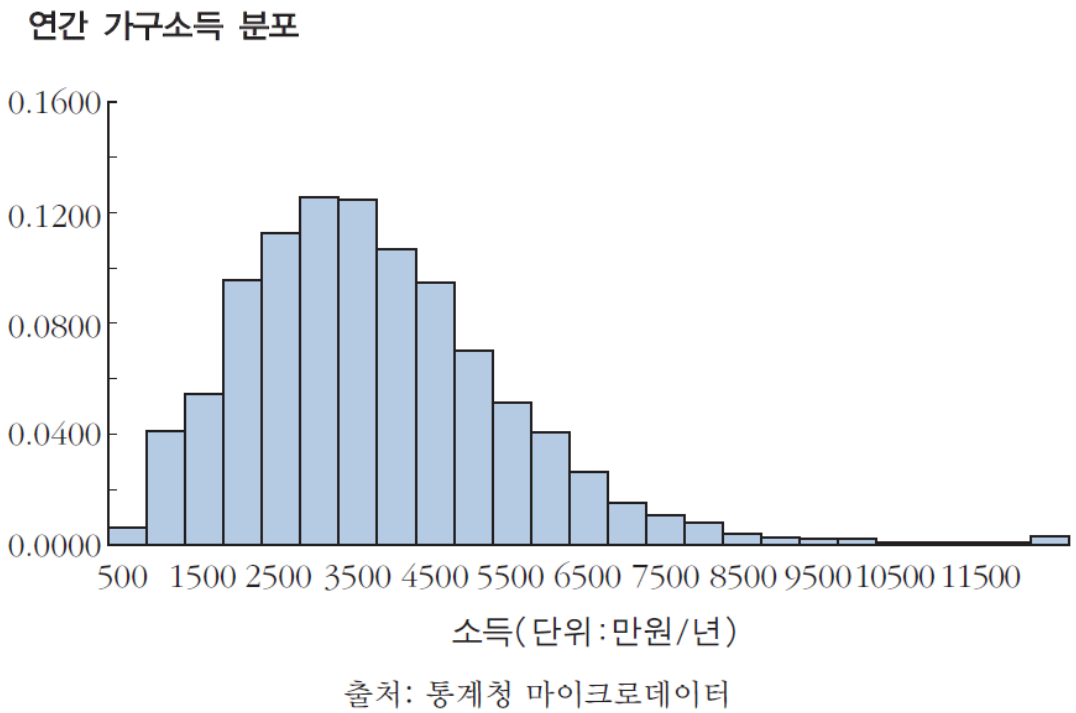
제p백분위수는 그 값보다 작은 값이 p%, 큰 값이 (100-p)%가 되는 경계값

많은 히스토그램은 정규분포곡선과 다름(평균과 표준편차만으로는 부족)

이러한 히스토그램을 요약할 때는 백분위수 개념이 유용

# 5. 백분위수

연간 가구소득 분포




출처: 통계청 마이크로데이터

연간 가구소득 분포 : 2008년, 한국

| 백분위 | 백분위수(만원/년) |
|---|---|
| 1 | 589.5 |
| 10 | 1484.7 |
| 25 | 2242.8 |
| 50 | 3254.1 |
| 75 | 4438.5 |
| 90 | 5687.3 |
| 99 | 8887.9 |

# 6. 사분위수와 상자그림

## 사분위수

백분위수 가운데 25번째, 50번째, 75번째 백분위수를 특별히 제1사분위수(first quartile), 제2사분위수(second quartile), 제3사분위수(third quartile)라 부름

50번째 백분위수는 제2사분위수이면서 중앙값(median)임

사분위수 범위(interquartile range)

(사분위수 범위) = (제3사분위수) - (제1사분위수)

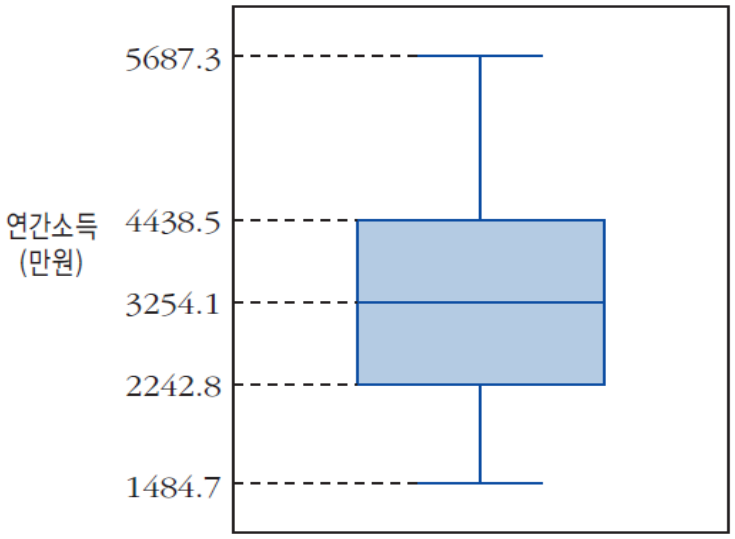
다섯 숫자 요약(five number summary): 최소값, 제1사분위수, 제2사분위수, 제3사분위수, 최대값

*(최소값, 최대값) 쌍 대신 (제5백분위수, 제95 백분위수) 쌍  또는 (제1백분위수, 제99 백분위수) 쌍을 사용하기도 함

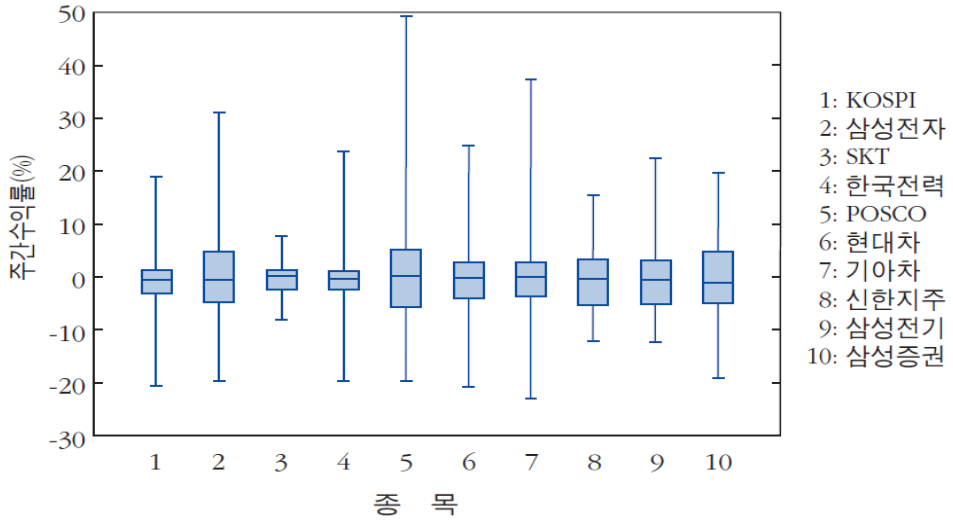
# 6. 사분위수와 상자그림

상자그림 (box plot)

연간 가구소득 분포



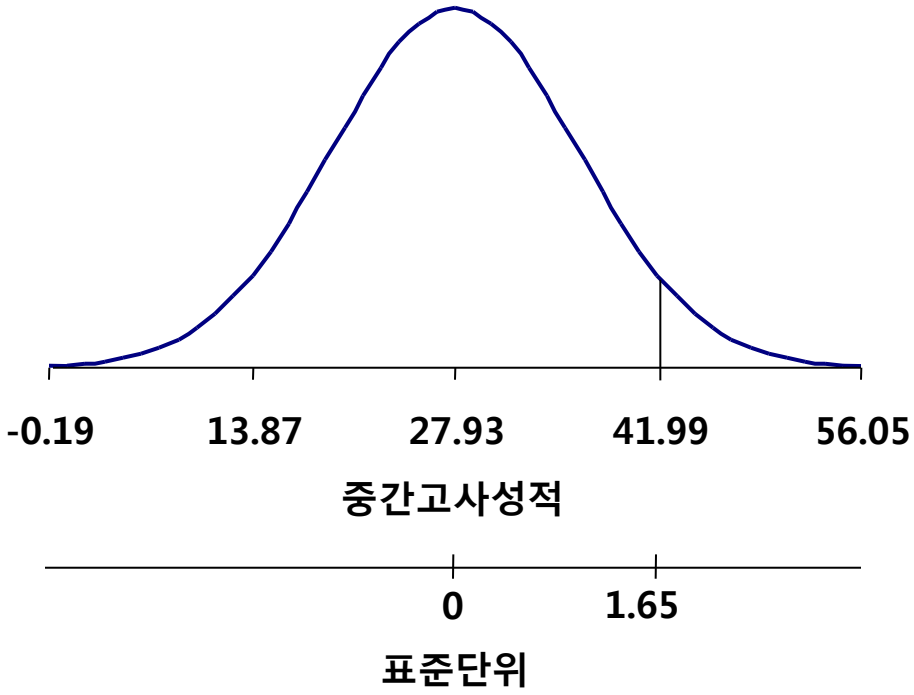

상자그림 : KOSPI 지수와 거래소 개별종목의 2008년 주간수익률



# 7. 백분위수와 정규분포곡선

백분위수 찾기

예: 2009년도 1학기 통계학 중간고사에서 상위 5%에 해당하는 학생의 점수를 추정하라. 단 평균점수는 27.93점이고 표준편차는 8.52점이다.




$z$ =1.65일 때 [0,1.65] 구간의 면적이 45% 이므로, 상위 5% 학생의 $z$ 값은 1.65이다. 이 학생은 평균보다 1.65 * 8.52 = 14.06 점 높을 것으로 추정된다. 즉, 이 학생은 27.93+14.06=41.99점을 받았을 것으로 추정된다.